解答速報

医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX × 医学部受験予備校 医特

東京慈恵会医科大学 一般選抜

数学

1．ア： $\dfrac{1}{3}$　　イ： $\dfrac{31}{54}$

X_1, X_2, X_3に2の倍数がない事象をA

X_1, X_2, X_3に5の倍数がない事象をB

とすると，求める事象は$\overline{A\cup B}$

よって，$1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{3}$

イ：和が6の倍数になる数字の組み合わせは$(1,5),(2,4),(3,3),(6,6)$　…①より

X_1が1のとき，X_2, X_3の組み合わせは5を含まない5^2通りから$(2,4),(4,2),(3,3),(6,6)$を除いたもの$5^2-4=21$通り

同様に$X_1=2,4,5$のときも21通り

$X_1=3$ のときX_2, X_3の組み合わせは3を含まない5^2通りから

$(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(6,6)$を除いたもの$5^2-5=20$通り

同様に$X_1=6$のときも20 通り

$$\frac{21\cdot 4+20\cdot 2}{6^3}=\frac{124}{6^3}=\frac{31}{54}$$

2．(1) 3以上の自然数nについて$0\leqq x\leqq 1$のとき

$$\frac{x}{\log(n+1)}\leqq\frac{x}{\log(x+n)}\leqq\frac{x}{\log n}\text{ より}$$

$$\int_0^1\frac{x}{\log(n+1)}dx\leqq\int_0^1\frac{x}{\log(x+n)}dx\leqq\int_0^1\frac{x}{\log n}dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2\log(n+1)}\right]_0^1\leqq\int_0^1\frac{x}{\log(x+n)}dx\leqq\left[\frac{x^2}{2\log n}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2\log(n+1)}\leqq\int_0^1\frac{x}{\log(x+n)}dx\leqq\frac{1}{2\log n}$$

(2) $\log x=t$とおくと，$\dfrac{1}{x}dx=dt$

$$\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\log x}+C$$

(3) kが3以上の自然数のとき(1)より $\dfrac{1}{2\log(k+1)} \leqq \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \dfrac{1}{2\log k}$

$$\frac{2}{k\log k}\cdot\frac{1}{2\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{2}{k\log k}\cdot\frac{1}{2\log k}$$

$$\frac{1}{k\log k\cdot\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{k(\log k)^2}$$

よって,

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\cdot\log(k+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2}$$

(ⅰ) ここで $f(x)=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ とおくと,$x>0$ で $x,\log x$ はそれぞれ単調増加であるので,

$x(\log x)^2$ は正の範囲で単調増加。よって, $f(x)$ は単調減少。

よって, $k\leqq x\leqq k+1$ のとき $\dfrac{1}{k\{\log k\}^2} \leqq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)dx$

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \sum_{k=n}^{m}\int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{n-1}^{m} f(x)dx = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{n-1}^{m}$$

$$= -\frac{1}{\log m} + \frac{1}{\log(n-1)} = (\text{右辺})$$

(ⅱ) $\dfrac{1}{k\cdot\log k\cdot\log(k+1)} = \dfrac{1}{k\{\log(k+1)-\log k\}}\left\{\dfrac{1}{\log k} - \dfrac{1}{\log(k+1)}\right\}$

ここで, $\dfrac{1}{k\{\log(k+1)-\log k\}} - 1 = \dfrac{1-k\{\log((k+1)-\log k)\}}{k\{\log(k+1)-\log k\}}$ …①

さらに $g(x)=1-x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと

$$g'(x) = -\log(x+1)+\log x - \frac{x}{x+1} + 1 = \log\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \log\left(1-\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$$

$h(t)=\log(1-t)+t \quad (0<t<1)$ とおくと,

$h'(t)=\dfrac{-1}{1-t}+1=\dfrac{-t}{1-t}<0$ であり $h(0)=0$ より $h(t)<0$

よって $h\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=g'(x)<0$ …② $\left(x\geqq 3 \text{より} 0<\dfrac{1}{x+1}<1\right)$

さらに、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}(1-x\{\log(x+1)-\log x\}) = \lim_{x\to\infty}\left(1-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = 0$ …③

②③より $g(x)>0$ よって, ①も正、したがって

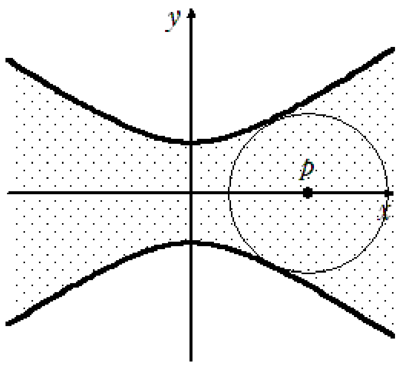
$$\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \leqq \frac{1}{k\{\log(k+1)-\log k\}}\left\{\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right\} \leqq \frac{1}{k\log k\log(k+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log(k+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) = \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} = (\text{左辺})$$

以上(ⅰ)、(ⅱ) より題意は示された。

3.(1)



領域Dに$(x-p)^2+y^2=r_1$が含まれているとき，

実数r_1の最大値は$x^2-py^2=-1$と$(x-p)^2+y^2=r_1$が接するときである。

つまり，

$x^2-p\{(r_1-(x-p)^2)\}=-1$

$(1+p)x^2-2p^2x+p^3-pr_1+1=0$

この判別式$D=0$である。

$$\frac{D}{4}=(p^2)^2-(1+p)(p^3-pr_1+1)$$

$$=-p^3+r_1p^2-p+pr_1-1\geqq 0$$

$$r_1=p-1+\frac{2p+1}{p^2+p}$$

$2p+1$とp^2+pの大小関係を比べる。

$$p^2+p-(2p+1)=p^2-p-1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}>0\quad(\because p\geqq 2)$$

つまり，$0<\dfrac{2p+1}{p^2+p}<1$

このときrは整数であるので，rは整数であるので，$r=[r_1]=p-1$

(2)　$(x-p)^2+y^2=p-1$　…①

$(x-p)^2>0$, $y^2\geqq 4$より$p>5$

5より大きい素数は奇数であるので，右辺は偶数。

つまり，$(x-p)$，yの偶奇は一致する。

（ｉ）$x-p$，yが共に奇数のとき，

pは奇数よりxは偶数。xは素数より$x=2$

①に代入し整理すると，$p^2-5p+5+y^2=0$

$$\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$$

$p>5$よりこれを満たす素数yは存在しない。

（ii）$x-p$，yが共に偶数のとき，

yは素数より$y=2$

①に代入し整理すると，$(x-p)^2+5=p$　…②

6を法で考えると$x-p\equiv 0,1,2,3,4,5$のとき

それぞれ　$(x-p)^2+5\equiv 5,0,3,2,3,0$となり，

$(x-p)^2+5>5$よりpが素数となるためには，$x-p\equiv 0$である必要があり，

条件を満たす中で，$|x-p|$が最小のときpは最小である。

$|x-p|=6$のとき, $p=41$, $x=47$で条件を満たす。

以上より$(x, y, p)=(47, 2, 41)$

つまり, $p=41$

※　②以降は書き出しで行うことが受験生としては正解であろう。

5以上の素数は6で割った余りに着目すると条件が絞れるので,

参考のため, 上記の解法を採用した

4. 条件より

$$z+\frac{1}{z-1}=\overline{z+\frac{1}{z-1}}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}-1}$$

この両辺に$(z-1)(\overline{z}-1)$をかけると

$$z(z-1)(\overline{z}-1)+\overline{z}-1=\overline{z}(z-1)(\overline{z}-1)+z-1$$

$$(z-\overline{z})\{(z-1)(\overline{z}-1)-1\}=(z-\overline{z})\{|z-1|^2-1\}=0$$

zは実数であるので,$z\fallingdotseq\overline{z}$。

よって, $|z-1|=1$

つまり, $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$とおける。

このとき, $z+\dfrac{1}{z-1}=1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta=1+2\cos\theta>0$

また, $z\fallingdotseq 1$より$1>\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\overline{z}}{2}+1\right|=|1+\cos\theta-i(2\sin\theta)|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{-3\cos^2\theta+2\cos\theta+5}$$

$$=\sqrt{-3\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$$

よって, $-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<1$

$$\frac{\sqrt{13}}{2}<\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\overline{z}}{2}+1\right|\leqq\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

～講評～

1　確率

さいころを用いた試行の確率。（１）は基本レベルで、（２）は標準レベル。

2　積分と不等式

積分の不等式の証明問題。非常に慈恵らしい出題となっている。（１）（２）はヒントで基本的。（３）の証明はなかなか考えさせるので、時間を考えると片側の証明ができればよいだろう。

3　双曲線

双曲線と円の位置関係についての条件から、不定方程式の解を求める。素数という条件をどのように使うか考えるところであるが、最終的に割り切って調べ上げていくタイプの問題。

4　複素数平面

今回の出題の中では最も方針が立てやすく、計算中心の内容となっている。確実性を考えると、この問題からやっていくべきであったかもしれない。

慈恵会医科大学の出題としては標準的な難易度となっている。(もちろん簡単という意味ではない)　５割強を目標としたい。